TEMA 6.- INTERVALOS DE CONFIANZA

6.1. Distribuciones asociadas a la Normal

6.1.1. Distribución Chi cuadrado de Pearson o Gi – dos

6.1.2. Distribución *t* de Student

6.2. Introducción a intervalos de confianza

6.3. Método de construcción de intervalos de confianza: Método de la Cantidad Pivotal

6.4. Intervalos de confianza para los parámetros de una característica *X*.

6.5. Toma de decisiones sobre los parámetros de una variable *X* mediante intervalos de confianza

6.6. Comparación de dos parámetros en el caso de dos características *X* e *Y* mediante intervalos.

6.6.1. Intervalo para comparar medias. Muestras pareadas de *X* e *Y*.

6.6.2. Intervalos para comparar medias y varianzas. Muestras independientes de *X* e *Y*.

6.7. Casos para abordar los problemas.

6.1 DISTRIBUCIONES ASOCIADAS A LA NORMAL

A partir de ahora, las variables se clasificarán en **normales** y **no normales**. Vamos a comenzar viendo dos distribuciones continuas asociadas a la distribución normal que nos harán falta en el desarrollo de este tema:

1. Distribución Chi cuadrado o "gi –dos"
2. Distribución t de Student

Veremos:

- Definición. Gráfico de la función de densidad
- Propiedades.
- Cálculo de probabilidades usando las tablas correspondientes.

6.1.1 DISTRIBUCIÓN CHI CUADRADO DE PEARSON O GI - DOS

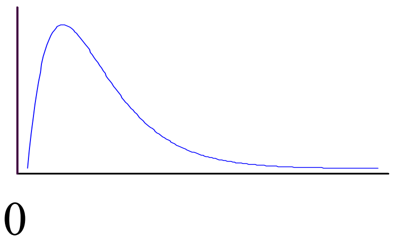
Definición: Si $X_1,\ldots,X_n$ son v.a. independientes $N(0,1)$, entonces la v.a. $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

se dice que sigue una distribución CHI – CUADRADO o " GI – DOS" de Pearson con *n* grados de libertad o parámetro *n*. La notación es

$$Y \sim \chi_n^2$$

OBSERVACIONES:

1) El parámetro *n* es el número de sumandos que intervienen en la definición de la variable.
2) La variable aleatoria chi-cuadrado es una variable de **tipo continuo**. Se puede demostrar que $\chi_n^2 = \gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$. Por tanto, el gráfico de su función de densidad es:



3) Para calcular probabilidades de esta distribución, usaremos **TABLAS.**

Ejemplo 1: Calcular $P(\chi_{15}^2 < 14.3)$ y $P(6.91 < \chi_{16}^2 < 19.4)$.

Del tema anterior sabemos que si X es una variable aleatoria con parámetros desconocidos $E[X]=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$, **LOS MEJORES ESTIMADORES** para estos parámetros son $\bar{X}$ y S^2.

Si X es una variable $N(\mu,\sigma)$, sobre estos estimadores se puede afirmar que

TEOREMA DE FISHER

Si $X_1,\ldots,X_n$ es una m.a.s. de una v.a. X con distribución $N(\mu,\sigma)$, entonces

(1) Los estadísticos o estimadores

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \text{y} \quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$ son v. a. independientes.

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$. (Ya sabemos que $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, por la reproductividad)

Obs: Si $X\sim N(\mu,\sigma)$ conocemos las distribuciones de los estadísticos $\bar{X}$ y S^2.

6.1.2. DISTRIBUCIÓN *t* DE STUDENT

Definición: Si $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi_n^2$ son v.a. independientes, entonces la variable aleatoria

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

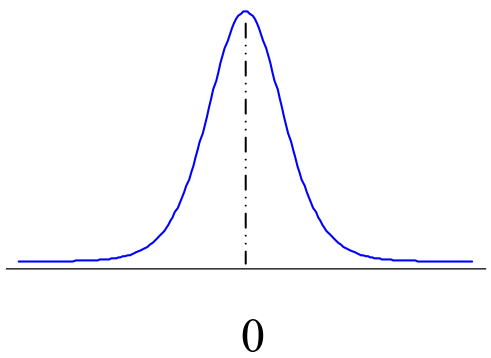
se dice que sigue una distribución ***t*** de Student de parámetro n o con n grados de libertad. La notación es $Z \sim t_n$.

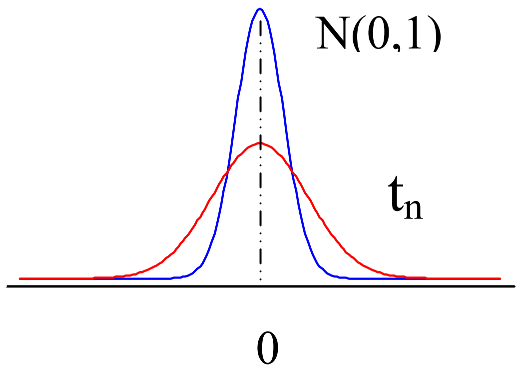
Observaciones:

1) El parámetro o número de grados de libertad de la t_n es el parámetro de la χ^2 que interviene en su definición.

2) La distribución *t* de Student es un modelo de **tipo continuo**.

La distribución ***t*** de Student toma valores en todo $\mathbb{R}$, es simétrica respecto del 0 y su gráfica tiene la misma forma que la de la distribución N(0,1) pero es un poco más achatada que la distribución N(0,1).





3) El cálculo de probabilidades de esta distribución se hará mediante **tablas**, teniendo en cuenta que:
   - Para calcular probabilidades de intervalos negativos usaremos la simetría de la distribución (como en el caso normal).
   - Al crecer n, la ***t*** de Student se parece a la N(0,1). Por tanto, para realizar cálculos de la variable ***t*** de Student con n > 120 aproximaremos a la N(0,1) y terminaremos el cálculo usando las tablas de la N(0,1).

Ejemplo 2: a) Calcular $P(-1.37 < t_{10} < 3.17)$ y $P(|t_{12}| < 0.873)$.

b) Encontrar x y c tal que $P(t_{20} < x) = 0.8$ y $P(t_{15} < c) = 0.05$.

TEOREMA: Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a.s. de una v.a. X con distribución $N(\mu,\sigma)$, entonces, la distribución de la variable aleatoria:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

donde $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $S = \sqrt{S^2}$ siendo $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

Demostración: (hacer)

La demostración de este teorema se basa en usar:

1.El teorema de Fisher para variables con distribución normal.

2. La definición de la distribución t de Student con parámetro n.

6.2. INTRODUCCIÓN A INTERVALOS DE CONFIANZA

OBJETIVO EN ESTE TEMA: Si θ es el parámetro desconocido y $\hat{\theta} = T(x_1, x_2, ..., x_n)$ es la estimación para θ, se quiere dar una **cota del error, K**, cometido al estimar θ, es decir,

$$\left|\theta - \hat{\theta}\right| < K$$

FORMA DE TRABAJO: Esta cota de error, K, se obtiene construyendo un **intervalo que contenga al parámetro θ**.

Ejemplo 3: Sea $X \sim P(\lambda)$. Tomamos una m.a.s. para estimar λ, con valores 4.21, 3.72, 2.15, 4.60. Una estimación razonable para λ es $\hat{\lambda} = \overline{x} = 3.67$. Supongamos que la cota de error en esta estimación es $K = 0.2$. Veamos que esto es equivalente a dar un intervalo que contiene al valor desconocido λ.

$$\left|\lambda - \hat{\lambda}\right| < 0.2 \Leftrightarrow -0.2 < \lambda - 3.67 < 0.2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3.67 - 0.2 < \lambda < 3.67 + 0.2 \Leftrightarrow \lambda \in (3.47, 3.87)$$

DEFINICIÓN: **Sea** $X \sim F_\theta$**, llamaremos** INTERVALO DE CONFIANZA **para θ con nivel de confianza 1-α (**con una confianza del 100(1-α)%**) a un intervalo (a, b) tal que**

$$P\left(a<\theta<b\right)=P\left(\theta\in\left(a,b\right)\right)=1-\alpha$$

Observaciones:

1. Los intervalos que vamos a construir **SIEMPRE** vienen dados en términos de probabilidad. La probabilidad 1-α la fija la persona que hace el estudio. El valor 1-α suele ser mayor o igual que 0.90.

2. Los extremos del intervalo *a* y *b* son variables aleatorias.

3. Intervalos de longitud menor **SIEMPRE** están asociados a menores cotas de error y, por tanto, mejores estimaciones del parámetro θ.

Ejemplo 4: En el ejemplo 3 para una cota de error $K = 0.2$, el intervalo para λ era

$$\lambda \in (3.47, 3.87)$$

Si la cota de error fuese menor, por ejemplo $K = 0.1$, tenemos un intervalo para λ de longitud menor:

$$\left|\lambda - \hat{\lambda}\right| < 0.1 \Leftrightarrow \left|\lambda - 3.67\right| < 0.1 \Leftrightarrow -0.1 < \lambda - 3.67 < 0.1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3.57 < \lambda < 3.77 \Leftrightarrow \lambda \in (3.57, 3.77)$$

A continuación vemos el método general de construcción de intervalos de confianza para un parámetro desconocido θ, que se llama **MÉTODO DE LA CANTIDAD PIVOTAL.**

6.3. MÉTODO LA CANTIDAD PIVOTAL

Paso 1: $X \sim F_\theta$, θ parámetro desconocido. Sea $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ el **mejor estimador** para θ y $\hat{\theta} = T(x_1, x_2, ..., x_n)$ su estimación. Obtenemos la distribución del estadístico T.

Paso 2: La distribución de T va a depender del parámetro desconocido θ. Se hace una transformación de T, que dará lugar a U = f(T). A la variable U la llamaremos PIVOTE. U tiene que cumplir:

- **a.** La distribución de U tiene que ser conocida y no depender de θ ni de ningún otro parámetro desconocido.
- **b.** El parámetro θ tiene que aparecer en la expresión del pivote U.

Paso 3: Elegir una probabilidad alta, 1-α. Buscar dos constantes h_1 y h_2 tal que $P(h_1 < U < h_2) = 1 - \alpha$, usando la distribución del pivote U.

Paso 4: Una vez conocidas h_1 y h_2, a partir de $P(h_1 < U < h_2) = 1 - \alpha$, despejar de la fórmula de U el valor θ hasta obtener una expresión del tipo

$$P(a < \theta < b) = 1 - \alpha.$$

El intervalo (a, b) obtenido es el intervalo de confianza para θ a nivel 1-α. A partir del mismo se obtiene la cota del error cometido en la estimación de θ mediante $\hat{\theta}$.

Observación: En el paso 3 la ecuación planteada $P\left(h_1 < U < h_2\right) = 1-\alpha$ tiene infinitas soluciones. Se puede demostrar que:

1. Si la **distribución de U es simétrica (N(0,1), t_{n-1})**, se obtienen intervalos de longitud mínima si elegimos $h_2 = -h_1 = h$.

   Entonces, buscaremos h que cumpla
   $$P\left(-h < U < h\right) = 1-\alpha .$$

2. Si la **distribución de U no es simétrica(χ^2_{n-1})** , se obtienen intervalos de longitud mínima al elegir h_1 y h_2 que resuelvan las ecuaciones:

$$P\left(U < h_1\right) = \alpha/2 \quad \text{y} \quad P\left(U > h_2\right) = \alpha/2$$

Ejemplo 5: El tiempo de impresión de una declaración del IRPF sigue una distribución normal. Se observa una muestra de dicho tiempo y se obtiene (en segundos):

5.3 20.3 6.4 10.4 22.2 9.7 14.5 15.2

a) Estimar el tiempo medio de impresión de una declaración, en segundos.

b) Construir un intervalo de confianza al 95% ($1-\alpha = 0.95$) para el tiempo medio de impresión de una declaración. A partir del mismo, encontrar una cota del error cometido en la estimación del tiempo medio de impresión ¿Es admisible que dicho tiempo medio sea de 20 segundos?

c) Encontrar el tamaño de la muestra, n, necesario para que el error en la estimación del tiempo medio de impresión sea menor que 1 segundo. Suponer que no varía la cuasivarianza muestral.

d) Construir otro intervalo de confianza al 99% ($1-\alpha = 0.95$) para el tiempo medio de impresión. Compararlo con el obtenido en el apartado b)

OBSERVACIONES

1.-Si aumentamos el tamaño de la muestra **SIEMPRE** disminuye la longitud del intervalo de confianza y, por tanto, disminuye la cota de error en la estimación del parámetro.

2.- Si aumentamos la probabilidad $1-\alpha$ que se usa para construir el intervalo (manteniendo la muestra), **SIEMPRE** aumenta la longitud del intervalo y, por tanto, aumenta cota de error en la estimación.

3.- Los intervalos que se obtienen son **PROBABILÍSTICOS**. Si $\theta \in (a,b)$ con probabilidad $1-\alpha$ significa que en 100 intervalos que construyamos para θ con 100 muestras diferentes:

- En $(1-\alpha)100\%$ de los intervalos está seguro el parámetro θ.
- En el resto de los intervalos, $\alpha 100\%$, no es seguro que esté el valor θ.

4.- Si en el intervalo probabilístico sustituimos la muestra concreta pasamos a tener un **INTERVALO NUMÉRICO, I**. En este momento ya NO se puede hablar de probabilidad: sólo puede suceder que **θ pertenezca a I o que θ no pertenezca a I.**

6.4. INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS PARÁMETROS DE UNA CARACTERÍSTICA *X*.

Cuando se estudia una v.a. X sus principales parámetros son:

- $\mu = E[X]$, la media que X.
- $\sigma^2 = V(X)$, la varianza de X (ó σ, su desviación típica)
- p = proporción de individuos que poseen una cierta propiedad.

Estos son los parámetros para los que haremos estimaciones y obtendremos las correspondientes cotas de error para esas estimaciones mediante la obtención de intervalos de confianza.

Los mejores estimadores para estos parámetros (tema 5) son:

- para μ es $\hat{\mu} = \overline{X}$.
- para σ^2 es $\hat{\sigma}^2 = S^2$.
- para p es $\hat{P} = \dfrac{R}{n} = \dfrac{\text{nº de elementos de la muestra que tienen la propiedad}}{\text{tamaño muestra}}$

CASOS A ESTUDIAR

CASO 1. $X \sim N(\mu, \sigma)$, **intervalo para μ** con σ desconocida, nivel de confianza 1-α:

- Estimación para μ: $\hat{\mu} = \overline{x}$

- Pivote: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ (Formulario)

- Intervalo para μ: $\left(\overline{X} \pm h \dfrac{S}{\sqrt{n}} \right)$ con $P\left(t_{n-1} \leq h\right) = 1 - \alpha / 2$ (Hay que saber llegar a este intervalo a partir del pivote)

- Cota de error en la estimación de μ:

$$|\mu - \hat{\mu}| = |\mu - \overline{x}| < K \text{ con } K = h\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo 6: Problema 1, apartados a) y b) ya realizados.

CASO 2. $X \sim N(\mu,\sigma)$, **intervalo para σ²**, μ desconocida, nivel de confianza 1-α:

- Estimación para σ²: $\hat{\sigma}^2 = s^2$

- Pivote: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ (Formulario)

- Intervalo para σ²: $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{h_2}, \dfrac{(n-1)S^2}{h_1}\right)$, donde $P\left(\chi^2_{n-1} \le h_2\right) = 1-\alpha/2$,
$P\left(\chi^2_{n-1} \le h_1\right) = \alpha/2$. (Hay que saber llegar a este intervalo a partir del pivote)

- Cota de error en la estimación de σ²:
$\left|\sigma^2 - \hat{\sigma}^2\right| = \left|\sigma^2 - s^2\right| < K$ siendo $K = \max\left\{\left|\dfrac{(n-1)s^2}{h_2} - s^2\right|, \left|\dfrac{(n-1)s^2}{h_1} - s^2\right|\right\}$

Ejemplo 7: Problema 1, apartado c)

CASO 3. X con distribución cualquiera, **intervalo para μ,** varianza σ^2 desconocida , muestra de tamaño $n \geq 100$, nivel de confianza $1-\alpha$:

- Estimación para μ: $\hat{\mu} = \overline{x}$
- Pivote: $U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$ si $n \geq 100$ (TCL) (Formulario)
- Intervalo aproximado para μ si $n \geq 100$: $\left(\overline{X} \pm h \dfrac{S}{\sqrt{n}} \right)$ donde

  $P\big(N(0,1) \leq h\big) = 1 - \alpha/2$ (Hay que saber llegar a este intervalo a partir del pivote)
- Cota de error en la estimación de μ: $|\mu - \hat{\mu}| = |\mu - \overline{x}| < K$ con $K = h\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

Observación: En este caso NO se pueden hacer intervalos para σ^2 al no tener la variable X distribución normal salvo en los casos en que la varianza tiene una relación directa con la media (por ejemplo, si X tiene distribución de Poisson o X es exponencial)

Ejemplo 8: problema 2 de la hoja de problemas.

CASO 4. $X \sim B(1, p)$, **intervalo para la media μ = *p***, varianza desconocida $\sigma^2 = p(1-p)$, muestra de tamaño $n \geq 100$, nivel de confianza $1-\alpha$. **Este caso es un caso particular del caso 3.**

Vamos a ver que ***p* representa el porcentaje o proporción de individuos que poseen una cierta propiedad.**

Definimos la variable X que toma los valores:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{cuando el individuo SI tiene la propiedad en estudio} \\ 0 & \text{cuando el individuo NO tiene la propiedad en estudio} \end{cases}$$

Entonces, la probabilidad de cada valor es $\begin{cases} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{cases}$, y esto significa que $X \sim B(1, p)$.

- Estimación para p:

$$\hat{p} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{r}{n} = \frac{\text{nº de individuos de la muestra que SI poseen la característica en estudio}}{\text{tamaño muestra}}$$

- Pivote: $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{\hat{P}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n}}} \approx N\left(0,1\right)$ si $n \geq 100$ (TCL) (Formulario) con $\hat{P} = \dfrac{R}{n}$

- Intervalo aproximado para p si $n \geq 100$: $\left(\hat{P} \pm h\sqrt{\dfrac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n}}\right)$ donde

$P\left(N\left(0,1\right) \leq h\right) = 1-\alpha/2$ (Hay que saber llegar a este intervalo a partir del pivote)

- Cota de error aproximada en la estimación de p:

$$\left|p-\hat{p}\right| < K \text{ siendo } K = h\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}$$

Ejemplo 9: Problema 3 de la hoja de problemas

6.5. TOMA DE DECISIONES SOBRE LOS PARÁMETROS DE UNA VARIABLE *X* MEDIANTE INTERVALOS DE CONFIANZA

1.- Los intervalos de confianza para un parámetro θ, además de dar una cota del error cometido en la estimación de θ mediante $\hat{\theta}$, **permiten tomar decisiones** sobre θ del tipo $\vartheta = \vartheta_0$ ó $\vartheta \neq \vartheta_0$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, con una confianza $1-\alpha$.

- Si $\theta_0 \in$ Intervalo $\Leftrightarrow$ Aceptamos que $\theta = \theta_0$ (no podemos rechazar que $\theta = \theta_0$), con una confianza $1-\alpha$.
- Si $\theta_0 \notin$ Intervalo $\Leftrightarrow$ Diremos que $\theta \neq \theta_0$, con una confianza $1-\alpha$.

2.- Las decisiones sobre hipótesis del tipo

$$\theta < \theta_0, \theta \leq \theta_0, \theta > \theta_0 \text{ o } \theta \geq \theta_0$$

NO se pueden tomar de forma definitiva con intervalos aunque se puede intuir lo que podría suceder en algunos casos. Este tipo de decisiones son objeto de estudio del tema siguiente.

Ejemplo 10: Supongamos que el intervalo obtenido para μ, con un nivel de confianza de 0.95 fuese, por ejemplo, (1.3, 4.7). Ante las preguntas:

i. ¿Puede ser $\mu = 6$? diríamos que no, con una confianza del 95%, porque μ pertenece al intervalo (1.3, 4.7), al 95% y el valor 6, no.

ii. ¿Puede ser $\mu = 2$? responderíamos que sí puede ser, con una confianza del 95%, porque μ pertenece al intervalo (1.3, 4.7), al 95% ,y el valor 2, también.

iii. ¿Puede ser $\mu = 3$? responderíamos que sí, con una confianza del 95%, porque μ pertenece al intervalo (1.3, 4.7), al 95% y el valor 3, también ¿Qué haríamos en este caso? Aumentar el tamaño de la muestra.

iv. ¿Podríamos decidir que $\mu > 1$? NO podríamos tomar la decisión con un intervalo de confianza. Decisiones de este tipo se verán en el tema siguiente.

6.6. COMPARACIÓN DE DOS PARÁMETROS EN EL CASO DE DOS CARACTERÍSTICAS *X* e *Y* MEDIANTE INTERVALOS

Al estudiar dos características *X* e *Y* el objetivo habitual suele ser COMPARARLAS. La comparación se hace a través de sus **medias** y **varianzas.** **Algunas de estas decisiones las tomaremos utilizando intervalos de confianza.**

Notación: $X \text{ con } E(X)=\mu_X \text{ y } V(X)=\sigma_X^2, Y \text{ con } E(Y)=\mu_Y \text{ y } V(Y)=\sigma_Y^2$

1.- La comparación de las medias μ_X y μ_Y se hace a través de $\mu_X - \mu_Y$ **:**

a. Ocurrirá que $\mu_X = \mu_Y \Leftrightarrow \mu_X - \mu_Y = 0$ **.**

b. Ocurrirá que $\mu_X > \mu_Y \Leftrightarrow \mu_X - \mu_Y > 0$ **.**

c. Ocurrirá que $\mu_X < \mu_Y \Leftrightarrow \mu_X - \mu_Y < 0$ **.**

Observaciones:

1.- Con intervalos SOLAMENTE se pueden tomar decisiones del tipo a).

2.- También tomaremos decisiones del tipo $\mu_X - \mu_Y = c$ ó $\mu_X - \mu_Y \neq c,\ c \in \mathbb{R}$ **.**

3.- El orden de la resta es importante: $\mu_X - \mu_Y \neq \mu_Y - \mu_X$

2.- La comparación de varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 se hace a través de σ_X^2 / σ_Y^2:

a. Ocurrirá que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \Leftrightarrow \sigma_X^2 / \sigma_Y^2 = 1$.

b. Ocurrirá que $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \Leftrightarrow \sigma_X^2 / \sigma_Y^2 > 1$.

c. Ocurrirá que $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2 \Leftrightarrow \sigma_X^2 / \sigma_Y^2 < 1$.

Observaciones:

1.- Con intervalos SOLAMENTE se pueden tomar decisiones del tipo a). En el tema siguiente estudiaremos la toma de decisiones de los tipos b) y c).

2.-También tomaremos decisiones del tipo $\sigma_X^2 / \sigma_Y^2 = c$ ó $\sigma_X^2 / \sigma_Y^2 \neq c$, $c \in \mathbb{R}$

3.- El orden del cociente es importante: $\sigma_X^2 / \sigma_Y^2 \neq \sigma_Y^2 / \sigma_X^2$

Para obtener los intervalos de confianza que necesitamos partiremos de una muestra de la variable *X* y otra de la variable *Y*, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *e* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ de tamaños *n* y *m*, respectivamente.

Nuestros parámetros ahora son θ_1 y θ_2 siendo $\theta_1 = \mu_X - \mu_Y$ y $\theta_2 = \sigma_X^2 / \sigma_Y^2$.

Igual que para una variable, el METODO DE LA CANTIDAD PIVOTAL permite calcular INTERVALOS DE CONFIANZA para estos parámetros θ_1 y θ_2

Distinguiremos entre dos tipos de muestras:

- **MUESTRAS PAREADAS**: significa que las muestras de las variables *X* e *Y* son DEPENDIENTES y que se observan las dos características, *X* e *Y* **sobre los mismos individuos.** En este caso, calcularemos los intervalos para el parámetros $\theta_1 = \mu_X - \mu_Y$ a mano. No se calcularán intervalos para θ_2.
- **MUESTRAS INDEPENDIENTES:** en este caso los intervalos para los parámetros $\theta_1 = \mu_X - \mu_Y$ y $\theta_2 = \sigma_X^2 / \sigma_Y^2$ se obtendrán con Statgraphics.

En los casos de dos variables *X* e *Y* donde se toma una muestra de cada una de ellas, **lo primero que hay que hacer es distinguir si las muestras tomadas son pareadas o son muestras independientes** porque el procedimiento a seguir para construir el intervalo correspondiente es diferente.

Ejemplo 11:

1. Para comparar los tiempos medios de ejecución de dos programas A y B que resuelven sistemas de ecuaciones, lo lógico es resolver **los mismos sistemas de ecuaciones** con ambos programas.

Este sería un caso de **muestras pareadas (dependientes)** al trabajar con las variables

***X*:** tiempo de ejecución del programa A para resolver un sistema de ecuaciones.
***Y*:** tiempo de ejecución del programa B para resolver el mismo sistema.

2. Para comparar los consumos medios de dos modelos de coche A y B trabajaríamos con **muestras independientes** de las variables X e Y porque los coches testados serían diferentes.

***X*:** consumo de combustible de un modelo de coche A.
***Y*:** consumo de combustible de un modelo de coche B.

6.6.1. INTERVALO PARA COMPARAR μ_X Y μ_Y. MUESTRAS PAREADAS.

Hipótesis: La variable $D = X - Y$ tiene que verificar que $D \sim N\left(\mu_D = \mu_X - \mu_Y, \sigma\right)$.

Forma de trabajo: Al definirse la variable $D = X - Y$ y verificarse que solamente tenemos un parámetro que es μ_D, siendo $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$, nos encontramos en el **CASO 1** que vimos para una sola variable *D* con distribución normal (6.4)

- Muestra de *D*: $d_i = x_i - y_i$, donde $\left\{x_i, y_i\right\}_{i=1}^{n}$ es la muestra de $\left\{X, Y\right\}$. La muestra de *X* y la muestra de *Y* tienen el mismo tamaño n.
- Estimación para μ_D: $\hat{\mu}_D = \bar{d} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$
- Pivote: $U = \dfrac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ donde $S_D^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2$
- Intervalo para μ: $\left(\bar{D} \pm h\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}\right)$ con $P\left(t_{n-1} \le h\right) = 1 - \alpha/2$
- Cota de error en la estimación de μ_D: $\left|\mu_D - \hat{\mu}_D\right| < K$ con $K = h\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}$

Obs: Si restamos al revés, es decir, $D = Y - X$, la muestra cambia: $d_i = y_i - x_i$.

Ejemplo 12: (**Problema 4 hoja**) Se trata de compara dos algoritmos de inversión de matrices. Para ello se miden los tiempos de ejecución, en segundos, con el algoritmo A de 8 matrices (variable X) y los tiempos de de ejecución, en segundos, con el algoritmo B de esas mismas 8 matrices (variable Y):

Algoritmo A	2.3	4.1	5.6	3.9	1.2	3.8	6.9	4.4
Algoritmo B	2.2	4.4	6.3	4.5	1.8	4.3	7.7	5.3

Suponiendo normalidad en la diferencia de tiempos de ejecución, se pide:

(a) Hallar un intervalo de confianza al 97% para la diferencia entre los tiempos medios de ejecución de los dos algoritmos.

(b) ¿Se puede aceptar que los tiempos medios de ejecución de ambos algoritmos son iguales?

(c) ¿Puede intuirse alguna relación entre el tiempo medio de ejecución del algoritmo A y el tiempo medio de ejecución del algoritmo B?

6.6.2. INTERVALOS PARA COMPARAR MEDIAS Y VARIANZAS. MUESTRAS INDEPENDIENTES DE *X* e *Y*

CASO 1. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X), Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$:

LO PRIMERO que hay que saber es si las varianzas de *X* e *Y* (que son desconocidas) son iguales o distintas. Para ello se calcula el

Intervalo para σ_X^2 / σ_Y^2 : Permite tomar de decisiones del tipo

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = c \text{ ó } \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \neq c \text{ , con } c \in \mathbb{R}.$$

Para c = 1, permite decidir si $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \Leftrightarrow \sigma_X^2 / \sigma_Y^2 = 1$ o si $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.

Ejemplo 13: Toma de decisiones del tipo $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = c$ ó $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \neq c$

Si, por ejemplo, el intervalo obtenido para σ_X^2 / σ_Y^2 , con una confianza del 90%, fuese (0.56, 1.50):

- ¿Podría ser $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \Leftrightarrow \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1$? Sí, con una confianza del 90%, porque $1 \in (0.56,\ 1.50)$.
- ¿Podría ser $\sigma_X^2 = \dfrac{3}{4}\sigma_Y^2 \Leftrightarrow \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 0.75$? Sí, con una confianza del 90%, porque $0.75 \in (0.56,\ 1.50)$.

Sin embargo, si el intervalo obtenido para σ_X^2 / σ_Y^2 , con una confianza del 90%, fuese (3.45, 5.23):

- ¿Podría ser $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \Leftrightarrow \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1$? No, con una confianza del 90%, porque $1 \notin (3.45,\ 5.23)$. La decisión sería que las varianzas son distintas.

Volviendo al caso 1, si con el intervalo de confianza para $\underline{\sigma_X^2 / \sigma_Y^2}$

- La decisión es $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, se calcula el correspondiente intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ (con Statgraphics).
- La decisión ha sido $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, se calcula el correspondiente intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$ (con Statgraphics).

Con ellos tomaremos decisiones del tipo $\mu_X - \mu_Y = c$ ó $\mu_X - \mu_Y \neq c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Si c = 0 tomaríamos decisiones del tipo $\mu_X = \mu_Y$ ó $\mu_X \neq \mu_Y$.

CASO 2. *X* e *Y* variables con distribución cualquiera, medias μ_X y μ_Y:

Aquí las varianzas se consideran distintas puesto que si

Se obtiene el intervalo para $\mu_X - \mu_Y$ (con Statgraphics), considerando $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ distintas y desconocidas (al no ser *X* y/o *Y* normales NO se pueden hacer intervalos para σ_X^2 / σ_Y^2).

Este intervalo sólo es válido si los tamaños muestrales, n , m ≥ 100 y permite tomar decisiones del tipo $\mu_X - \mu_Y = c$ ó $\mu_X - \mu_Y \neq c$.

Ejemplo 14: Toma de decisiones del tipo $\mu_X - \mu_Y = c$ ó $\mu_X - \mu_Y \neq c$

Si una vez tomada la decisión sobre si las varianzas son iguales o distintas, el intervalo construido para $\mu_X - \mu_Y$ es, por ejemplo, (2.34, 4.45), con una confianza del 97%:

- ¿Puede ser $\mu_X = \mu_Y \Leftrightarrow \mu_X - \mu_Y = 0$? Podemos asegurar, con una confianza del 97%, que no porque $0 \notin (2.34,\ 4.45)$.

- ¿Puede ser $\mu_X - \mu_Y = 3$? Podemos aceptar, con una confianza del 97%, que sí porque $3 \in (2.34,\ 4.45)$.
- ¿Puede ser $\mu_X - \mu_Y = 4$? Cuidado porque, con una confianza del 97%, también aceptaríamos esta hipótesis porque $4 \in (2.34,\ 4.45)$.

- ¿Podríamos decidir qué $\mu_X - \mu_Y > 0 \Leftrightarrow \mu_X > \mu_Y$? Este tipo de decisiones NO se toman con un intervalo, sino en el tema siguiente.

6.7. CASOS PARA ABORDAR LOS PROBLEMAS

$$X\begin{cases} X \text{ distribución normal}\begin{cases}\text{intervalo para la media } \mu \\ \text{intervalo para la varianza } \sigma^2\end{cases} \\ X \text{ distribución cualquiera, n} \geq 100 \begin{cases}\text{intervalo aproximado para la media } \mu \\ \text{intervalo aproximado para la proporción } p\end{cases}\end{cases}$$

$$X \text{ e } Y\begin{cases} \text{muestras independientes}\begin{cases} X \text{ e } Y \text{ normales} \Rightarrow \text{intervalo para } \sigma_X^2 / \sigma_Y^2 \begin{cases}\text{si } \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \text{ intervalo para } \mu_X - \mu_Y \\ \text{si } \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2, \text{ intervalo para } \mu_X - \mu_Y\end{cases} \\ X \text{ e } Y \text{ cualquiera, n} \geq 100, \text{m} \geq 100 \Rightarrow \text{intervalo aproximado para } \mu_X - \mu_Y\end{cases} \\ \text{muestras pareadas } \Rightarrow \text{intervalo para } \mu_D = \mu_X - \mu_Y \text{ si } D = X - Y \text{ es normal} \\ \text{(dependientes)}\end{cases}$$

Los casos de una variable X y de dos variables X e Y, muestras pareadas, se resolverán a mano. El resto de casos se resolverán con Statgraphics.